2.2 Théorème de point fixe de Kakutani et sous-groupes compacts de $GL(E)$ (103, 106, 161, 181, 191, 203) [1]

Théorème 2.5 (Point fixe de Kakutani)**.** Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et $K \subset E$ une partie non-vide convexe et compacte de E stable par G, c'est-à-dire :

$$\forall g \in G, \quad g(K) \subset K.$$

Alors, il existe un point $z \in K$ qui soit point fixe sous G :

$$\forall g \in G, \quad g(z) = z.$$

Corollaire 2.6 (Sous-groupes compacts de $GL(E)$)**.** Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration du théorème de point fixe de Kakutani. Le but est de construire une nouvelle norme sur E adaptée à G et de minimiser cette norme sur K pour obtenir un point fixe. On définit l'application :

$$\begin{array}{rccc} N & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \longmapsto & \max\limits_{g \in G} \|g(x)\| \end{array}$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne assoicée au produit scalaire sur E. On observe alors que :

$$\forall x \in E, \ \forall g \in G, \quad N(g(x)) = \max_{h \in G} \|hg(x)\| = \max_{h \in G} \|h(x)\| = N(x).$$

Il faut donc trouver une condition sur $N(x)$ pour que cette égalité de norme se traduise par une égalité de vecteurs. On verra donc que le point fixe est l'unique élément de K de norme N minimale. Mais revenons à nos moutons ! N est-elle bien une norme ? Est-elle même bien définie ? Fixons $x \in E$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ g & \longmapsto & \|g(x)\| \end{array}$$

est continue sur le compact G. Donc elle admet un maximum. N est donc bien définie. Maintenant, montrons qu'il s'agit d'une norme sur E :

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. On a :

$$N(\lambda x) = \max_{g \in G} \|g(\lambda x)\| = \max_{g \in G} |\lambda| \|g(x)\| = |\lambda| \max_{g \in G} \|g(x)\| = |\lambda| N(x).$$

Rappel : la troisième égalité se justifie par le fait que, puisque $|\lambda|$ est positif, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |\lambda| x \end{array}$$

est croissante.

— Si $x \in E$ est tel que $N(x) = 0$, alors :

$$\forall g \in G, \quad \|g(x)\| = 0.$$

Ainsi, pour tout $g \in G$, $g(x) = 0$. Comme les éléments de G sont dans $GL(E)$, on a $x = 0$.

— Si $x, y \in E$, alors, en prenant $g_0 \in G$ tel que :

$$N(x+y) = \|g_0(x+y)\|,$$

on a :

$$N(x+y) = \|g_0(x+y)\| \leq \|g_0(x)\| + \|g_0(y)\| \leq N(x) + N(y).$$

La première inégalité vient du fait que g_0 est linéaire et que la norme euclidienne vérifie l'inégalité triangulaire. Nous aurons besoin de caractériser le cas d'égalité dans cette inégalité triangulaire, alors faisons-le. Il y a égalité entre $N(x+y)$ et $N(x)+N(y)$ si et seulement si les inégalités du dessus deviennent des égalités. On a alors :

$$\|g_0(x) + g_0(y)\| = \|g_0(x)\| + \|g_0(y)\|.$$

Or, cette égalité est vraie si et seulement si $g_0(x)$ et $g_0(y)$ sont positivement liés, ce qui est vrai si et seulement si x et y sont positivement liés (car g_0 est un isomorphisme de E). Réciproquement, si on a :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad y = \alpha x,$$

alors on a :

$$N(x+y) = N\left((1+\alpha)x\right) = (1+\alpha)N(x) = N(x) + \alpha N(x) = N(x) + N(y).$$

On a donc que N est une norme sur E. Ainsi, N est $1-$Lipschitzienne pour la norme N, donc continue sur (E, N). Les normes sur E étant équivalentes (dimension finie), N est continue sur E pour la norme euclidienne. Par compacité de K, la quantité :

$$\min_{x \in K} N(x)$$

est bien définie. Notons-la m, et considérons $z \in K$ tel que $N(z) = m$. Montrons que z est l'unique élément de K de norme N minimale.
Soit $y \in K$ tel que $N(y) = m$. K étant convexe, on a :

$$\frac{y+z}{2} \in K.$$

Calculons la norme N de ce vecteur :

$$m \leq N\left(\frac{y+z}{2}\right) = \frac{1}{2}N(y+z) \leq \frac{1}{2}\left(N(y) + N(z)\right) \leq \frac{1}{2}(m+m) = m.$$

On a donc :

$$N(y+z) = 2m = N(y) + N(z).$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire pour y et z. Ainsi, y et z sont positivement liés. Étant donné qu'ils sont de même norme N, on a que $y = z$. Ainsi, z est l'unique vecteur de K de norme minimale. Or, rappelons que :

$$\forall g \in G, \quad N(g(z)) = N(z) = m.$$

Ainsi, on a :

$$\forall g \in G, \quad g(z) = z.$$

□

Démonstration du corollaire. Soit H un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. On considère l'action de H sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ par congruence :

$$\begin{array}{rccl} \rho & : & H & \longrightarrow & GL\left(\mathscr{S}_n\left(\mathbb{R}\right)\right) \\ & & M & \longmapsto & \left|S \mapsto MSM^T\right. . \end{array}$$

Le morphisme ρ est continu. En effet, en munissant $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne issue du produit scalaire :

$$\begin{array}{rcccl} \langle \cdot, \cdot \rangle & : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (M,N) & \longmapsto & \mathrm{Tr}\left(M^T N\right), \end{array}$$

on a :

$$\begin{array}{rcl} \forall M,N \in H,\ \forall S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \quad \|\rho(M+N)(S) - \rho(M)(S)\| & = & \left\|N^T S M + M^T S N + N^T S N\right\| \\ & \leq & \left(2\|N\|\|M\| + \|N\|^2\right)\|S\| \end{array}$$

car la norme euclidienne sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est sous-multiplicative et invariante par transposition. Ainsi, en norme d'opérateur, on obtient :

$$\forall M,N \in H, \quad |\!|\!|\rho(M+N) - \rho(M)|\!|\!| \leq 2\|N\|\|M\| + \|N\|^2 \xrightarrow[N \to 0]{} 0.$$

De la continuité de ρ découle que $G := \rho(H)$ est un sous-groupe compact de $GL\left(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\right)$. On veut alors appliquer le théorème de point fixe de Kakutani. Mais quelle partie convexe compacte de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ prendre ? Cette partie doit être, en outre, stable par G. Ainsi, considérer l'ensemble :

$$\left\{MM^T \ \mid M \in H\right\} \subset \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

paraît acceptable car :

$$\forall N \in H, \quad \rho(N)\left(MM^T\right) = \underbrace{(MN)}_{\in H}(MN)^T.$$

Cependant, cet ensemble n'est pas convexe. Il est tout de même compact car l'application :

$$\begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MM^T \end{array}$$

est continue et H est compact. Posons alors :

$$K = \mathrm{Conv}\left\{MM^T \ \mid M \in H\right\}$$

Cet ensemble est inclus dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, et même dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe. De plus, K est convexe par définition et compact. Pourquoi ? C'est une conséquence du théorème de Carathéodory, qu'il est important de connaître :

Théorème 2.7 (Carathéodory)**.** Si $\mathscr{E}$ est un espace affine de dimension n, et $A \subset \mathscr{E}$, alors on a :

$$\mathrm{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \ \middle| \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1,\ \ (a_0, \ldots, a_n) \in A^{n+1} \right\}.$$

C'est-à-dire que tout point de l'enveloppe convexe de A peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ points de A.

De ce théorème se déduit que si E est un espace vectoriel de dimension finie et $K \subset E$ est un sous-ensemble compact, alors $\mathrm{Conv}(K)$ est compact, comme image directe du compact $[0,1]^n \times K^{n+1}$ par l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times E^{n+1} & \longrightarrow & E \\ ((\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}), (x_0, \ldots, x_n)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i + \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\right) x_n. \end{array}$$

On a donc K convexe, compacte et stable par G. En effet, si $M_1, M_2 \in H$ et $t \in [0,1]$, alors :

$$\forall N \in H, \quad \rho(N)\left(tM_1M_1^T + (1-t)M_2M_2^T\right) = t(M_1N)(M_1N)^T + (1-t)(M_2N)(M_2N)^T \in K$$

et ce calcul se généralise facilement lorsqu'on prend un système barycentrique à plus de 2 éléments. On peut alors appliquer le théorème de point fixe de Kakutani : il existe $S \in K$ tel que :

$$\forall N \in H, \quad \rho(N)(S) = S.$$

Or $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ainsi, il existe un unique $R \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que :

$$S = R^2.$$

Montrons alors que $R^{-1}HR \subset O_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \forall N \in H, \quad \left(R^{-1}NR\right)\left(R^{-1}NR\right)^T & = & R^{-1}NRRN^TR^{-1} \\ & = & R^{-1}\rho(N)\left(R^2\right)R^{-1} \\ & = & R^{-1}\underbrace{\rho(N)(S)}_{=S=R^2}R^{-1} \\ & = & I_n. \end{array}$$

Ainsi, H est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$! □

Remarque 2.2.1 (Quelle est l'intuition derrière la preuve et puis comment ça $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe ?)**.**

1. *Lorsqu'on a un sous-groupe compact G de $GL_n(\mathbb{R})$, on a souvent en tête l'idée d'un produit scalaire G-invariant. Dans le cas fini, on le connaît, c'est :*

$$b(x,y) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\langle g(x), g(y)\rangle.$$

Pour les groupes infinis, c'est plus compliqué. Mais cette somme fait penser à une somme de Riemann et donc on se dit qu'un produit scalaire G-invariant se fait sous la forme d'une intégrale :

$$b(x,y) = \frac{1}{\mu(G)}\int_G \langle g(x), g(y)\rangle \mathrm{d}\mu(g).$$

Mais alors que doit être μ ? En fait μ doit être une mesure borélienne finie invariante par translation à gauche des éléments de G : cela s'appelle une mesure de Haar. Et on sait qu'il en existe. Si on a un produit scalaire b qui soit G-invariant, alors en notant S la matrice de ce produit scalaire dans la base canonique, on a :

$$\forall N \in H, \quad N^TSN = S$$

et donc, en notant $R = \sqrt{S}$:

$$\forall N \in H, \quad RNR^{-1} \in O_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, le théorème de point fixe de Kakutani permet de trouver le produit scalaire invariant sans théorie de la mesure en faisant agir H sur les matrices symétriques (formes bilinéaires) et en considérant un sous-ensemble convexe compact de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (les produits scalaires !) Une fois qu'on a cette logique, on veut montrer que H est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire trouver $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall N \in H, \quad R^{-1}NR \in O_n(\mathbb{R})$$

i.e.

$$\forall N \in H, \quad \left(R^{-1}NR\right)\left(R^{-1}NR\right)^T = I_n.$$

Si on prend une décomposition polaire de R (dans l'autre sens cette fois !) $R = SO$, on obtient :

$$\left(R^{-1}NR\right)\left(R^{-1}NR\right)^T = O^T S^{-1} N S^2 N^T S^{-1} O.$$

Étant donné que O est orthogonale, cette dernière quantité est égale à I_n si et seulement si :

$$S^{-1} N S^2 N^T S^{-1} = I_n$$

i.e.

$$N S^2 N^T = S^2.$$

Il est donc logique de s'intéresser aux points fixes de l'action de H sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ par congruence, de constater qu'en appliquant le théorème du point fixe de Kakutani, le point fixe est dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et de prendre sa racine carrée pour conjuguer !

2. *J'ai bien dit que $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ était convexe. Montrons-le : soient $S_1, S_2 \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $t \in [0,1]$. On a que $tS_1 + (1-t)S_2 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ car c'est un espace vectoriel et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x^T \left(tS_1 + (1-t)S_2\right) x = t \underbrace{x^T S_1 x}_{>0} + (1-t) \underbrace{x^T S_2 x}_{>0} > 0.$$

Donc $tS_1 + (1-t)S_2 \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.